

Types et ensembles

Quentin Vermande

sous la direction d'Yves Bertot et Cyril Cohen

12 mars 2025

Université Côte d'Azur, Inria, STAMP, École Normale Supérieure, Université PSL, Université Claude Bernard Lyon 1, ENS de Lyon, LIP, CNRS, CASH



enseignement
théorie des ensembles

formalisation
théorie des types

enseignement
théorie des ensembles
 $2 \in \mathbb{N}$

formalisation
théorie des types
 $2 : \text{nat}$

enseignement
théorie des ensembles

$$2 \in \mathbb{N}$$

$$2 \in 2\mathbb{N}$$

formalisation
théorie des types

$$2 : \text{nat}$$

$$\cancel{2} : \text{even}$$

enseignement
théorie des ensembles

$$2 \in \mathbb{N}$$

$$2 \in 2\mathbb{N}$$

sous-ensemble

formalisation
théorie des types

$$2 : \text{nat}$$

~~$$2 : \text{even}$$~~

sous-objet

Formalisation de l'algorithme de Décomposition Algébrique Cylindrique de Collins :

11	Soit, pour $i \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$, $f_i : R^{n-1} \rightarrow R$ qui envoie $y \in C$ sur la i -ième racine de $Q(y)$ et $y \in R^{n-1} \setminus C$ sur i
----	---

11	Soit, pour $i \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$, $f_i : C \rightarrow R$ qui envoie $y \in C$ sur la i -ième racine de $Q(y)$
----	--

1. notion d'ensemble
2. ensemble \rightarrow type
3. élément \rightarrow objet du type ambiant
4. objet du type ambiant \rightarrow élément
5. ordre supérieur (ensemble d'ensembles)

Objectifs

1. notion d'ensemble (facile : prédicats)
2. ensemble \rightarrow type
3. élément \rightarrow objet du type ambiant
4. objet du type ambiant \rightarrow élément
5. ordre supérieur (ensemble d'ensembles)

1. notion d'ensemble (facile : prédicats)
2. ensemble \rightarrow type (automatique, facile)
3. élément \rightarrow objet du type ambiant
4. objet du type ambiant \rightarrow élément
5. ordre supérieur (ensemble d'ensembles)

1. notion d'ensemble (facile : prédicats)
2. ensemble \rightarrow type (automatique, facile)
3. élément \rightarrow objet du type ambiant (automatique)
4. objet du type ambiant \rightarrow élément
5. ordre supérieur (ensemble d'ensembles)

1. notion d'ensemble (facile : prédicats)
2. ensemble \rightarrow type (automatique, facile)
3. élément \rightarrow objet du type ambiant (automatique)
4. objet du type ambiant \rightarrow élément (automatique)
5. ordre supérieur (ensemble d'ensembles)

- Coercion : fonction $f : A \rightarrow B$, Rocq remplace *automatiquement* $x : A$ par $f\ x : B$.
- Classe de type : Rocq synthétise $x : T$ à l'aide de résultats déclarés au solveur.
- Structure canonique : table
 - « Projection \times Pattern \rightarrow Structure »qui résoud les équations « proj struct = pat »

Limitations

- Coercion :
 - nécessite des noms : ensemble \rightarrow type
 - pas d'inférence : ~~objet du type ambiant~~ \rightarrow élément
- Classe de type :
 - pas dirigé par la syntaxe (inefficace)
 - difficile à debugger
- Structure canonique : trop rigide

Métaprogrammation en Elpi :

- coercions insérées par un métaprogramme
- solveur de classes de type extensible

Démonstration !

- passage à l'échelle
- automatisation des déclarations
- amélioration des notations