

# Des tableaux de variation en Coq

Pourquoi, comment, et démo.

Martin Bodin

Inria

17 Octobre 2024

## Membres de l'IREM

- Emmanuel Beffara, Laboratoire d'informatique de Grenoble,
- Martin Bodin, Inria,
- Rémi Molinier, Institut Fourier.

## Stagiaires

- Wiame Karmouni Tlemcani,
- Tristan Mathon,
- Nathanaël Rasoamanana.

Cours de math, Novembre 2022, début de M1 : Extensions de corps.

Cours de math, Novembre 2022, début de M1 : Extensions de corps.

- « On applique l'algorithme vu en cours »,
- « On a  $\mathbb{Q}(v) \subseteq \mathbb{Q}(a)$  et donc par multiplicité de degré, on a  $[\mathbb{Q}(v) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}(v)][\mathbb{Q}(v) : \mathbb{Q}]$  »,

Cours de math, Novembre 2022, début de M1 : Extensions de corps.

- « On applique l'algorithme vu en cours »,
- « On a  $\mathbb{Q}(v) \subseteq \mathbb{Q}(a)$  et donc par multiplicité de degré, on a 
$$\underbrace{[\mathbb{Q}(v) : \mathbb{Q}] = 3}_{\text{Degré 3}} = \underbrace{[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}(v)]}_{\text{Degré de } P} [\mathbb{Q}(v) : \mathbb{Q}]$$
 »,
- « donc degré de  $P$  divise 3 »,

Cours de math, Novembre 2022, début de M1 : Extensions de corps.

- « On applique l'algorithme vu en cours »,
- « On a  $\mathbb{Q}(v) \subseteq \mathbb{Q}(a)$  et donc par multiplicité de degré, on a  $\underbrace{[\mathbb{Q}(v) : \mathbb{Q}] = 3}_{\text{Degré 3}} = \underbrace{[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}(v)]}_{\text{Degré de } P} [\mathbb{Q}(v) : \mathbb{Q}]$  »,
- « donc degré de  $P$  divise 3 »,
- « Ce diagramme commute, donc... ».

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i) = \mathbb{Q}(\sqrt{3} + i, i) & \\ & \nearrow & \uparrow \\ \mathbb{Q}(\sqrt{3} + i) & & \mathbb{Q} \\ & \nwarrow & \\ & & \end{array}$$

Argumentation	Démonstration	Preuve
Suite d'arguments (y compris exemples)	Argumentation convaincante pour une communauté	Suite d'arguments se suivant selon des règles prédéfinies

# Démonstration vs preuve

Test

Démonstration  
sur tableau

Article

Coq



Argumentation

Démonstration

Preuve

Suite d'arguments  
(y compris exemples)

Argumentation  
convaincante pour  
une communauté

Suite d'arguments  
se suivant selon des  
règles prédéfinies



Utilisé constamment :

- Géométrie,
- Théorie des catégories,
- Analyse de fonctions,
- etc.

Avec un rôle illustratif ou démonstratif.

À quoi pourrait ressembler Coq + Graphique ?

# Fenêtres modales dans des logiciels de preuve

The screenshot shows a software window titled "Image réciproque et inclusion (iii) — dEDuction". The interface is divided into several sections:

- Préférences Exercice**: A toolbar with navigation icons (back, forward, refresh, search) and a settings icon.
- Contexte (objets et propriétés)**: A list of definitions and hypotheses:
  - X : ensemble
  - Y : ensemble
  - f : X → Y
  - A : partie de Y
  - A' : partie de Y
  - y : élément de Y (highlighted in green)
  - H1 : f surjective (highlighted in green)
  - H2 :  $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(A')$
  - H3 :  $y \in A$  (checked)
- Actions (règles logiques et énoncés)**: A grid of logical symbols and buttons:
  - Logical symbols:  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\neg$ ,  $\Rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$ ,  $\forall$ ,  $\exists$ ,  $=$ ,  $\mapsto$ .
  - Buttons: "But !", "Méthodes de preuve...", "Nouvel Objet..."
- Énoncés**: A tree view of the proof's structure:
  - Ensembles et applications
    - Définitions
      - Généralités
      - Unions et intersections
    - Applications
      - Image directe (D)
      - Image directe (T)
      - Image réciproque (D)
      - Composition (D)
      - Application injective (D)
      - Application surjective (D)
    - Exercices
- But**: The goal to be proven,  $y \in A'$ .

# Fenêtres modales dans des logiciels de preuve

*Soient* les ensembles  $A$   $B$

*Soit*  $f : A \rightarrow B$

(1)  $f$  est injective

*Soit* l'ensemble  $C$

(2)  $C \subseteq A$

*Soit* l'élément  $x$

(3)  $x \in f^{-1}(f(C))$

(4)  $x \in A$

**5**  $f(x) \in f(C)$

(6)  $x \in C$

(7)  $f^{-1}(f(C)) \subseteq C$

*Soit* l'élément  $x$

(8)  $x \in C$

(9)  $x \in f^{-1}(f(C))$

déclarations

**⚡ Déduction à partir de (5)**

(5) $f(x) \in f(C)$	<i>référence</i>
<i>Soit</i> l'élément $x_1$	<i>déclaration</i>
(a) $x_1 \in C$	➤ (5) <i>par définition de l'ensemble image</i>
<b>b</b> $f(x) = f(x_1)$	➤ (5) <i>par définition de l'ensemble image</i>

●—————●

🔄 ⏪ ⏩

**Appliquer**

(3) *par définition de l'ensemble antécédent*

➤ **à justifier**

$x \dots$  (6) *par définition de l'inclusion*

*déclaration*

*hypothèse*

➤ **à justifier**

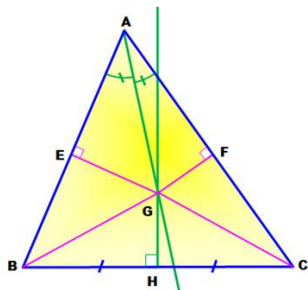
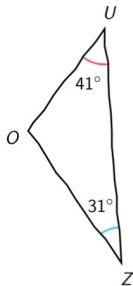
- Lien avec de la preuve,
- Possibilité de faire des preuves totalement textuelles ou presque totalement graphique,
- Utilisé en licence,
- Simple à prototyper.

- ⊖ Pas simple à prototyper,
- ⊖ Connu comme complexe,
- ⊖ Cabri géomètre, Geogebra, etc. contribuent à des attentes.

## Opinion

Coq + géométrie serait radicalement différent de Geogebra.

- Les angles droits ne devraient apparaitre droits que si montré.
- Lignes courbes pour manipuler des hypothèses non montrées.



- ⊕ Plus simple à prototyper,
- ⊕ Vus en licence sous forme de révision.
  - Idéal pour les voir dans un autre contexte.

Polytech, Février 2023, ~50 étudiant·es, on récupère le brouillon :

Donnez le tableau de variation de la fonction  $f(x) = \frac{2x - 1}{5x^2 - 1}$ .

Polytech, Février 2023, ~50 étudiant·es, on récupère le brouillon :

Donnez le tableau de variation de la fonction  $f(x) = \frac{2x-1}{5x^2-1}$ .

exercice :

Donner le tableau de variation de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{2x-1}{5x^2-1}$$

Solution

↳ Ensemble de définition

$$5x^2-1 \neq 0 \Rightarrow (\sqrt{5}x-1)(\sqrt{5}x+1) \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ et } x \neq -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Df :  $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right\}$

La fonction  $f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right\}$  donc

$$f'(x) = \frac{2(5x^2) - 10x(2x-1)}{(5x^2-1)^2}$$

$$= \frac{10x^2 - 20x^2 + 10x}{(5x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-10x^2 + 10x - 2}{(5x^2-1)^2}$$

Soit  $P(x) = -10x^2 + 10x - 2$

on a  $\Delta = 10^2 - 4 \times (-10) \times (-2) = 20 \Rightarrow x_1 = \frac{10 - \sqrt{20}}{2 \times (-10)} = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}$  et  $x_2 = \frac{10 + \sqrt{20}}{2 \times (-10)} = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}$

donc  $f'(x) = \frac{(x - \frac{5 - \sqrt{5}}{10})(x - \frac{5 + \sqrt{5}}{10})}{(5x^2-1)^2}$

$\forall x \in ]-\infty, \frac{5 - \sqrt{5}}{10}[ \cup ]\frac{5 + \sqrt{5}}{10}, +\infty[$ ,  $f'(x) < 0$

$\forall x \in ]\frac{5 - \sqrt{5}}{10}, \frac{5 + \sqrt{5}}{10}[$ ,  $f'(x) > 0$  et  $\forall x \in ]\frac{5 + \sqrt{5}}{10}, +\infty[$ ,  $f'(x) < 0$ .

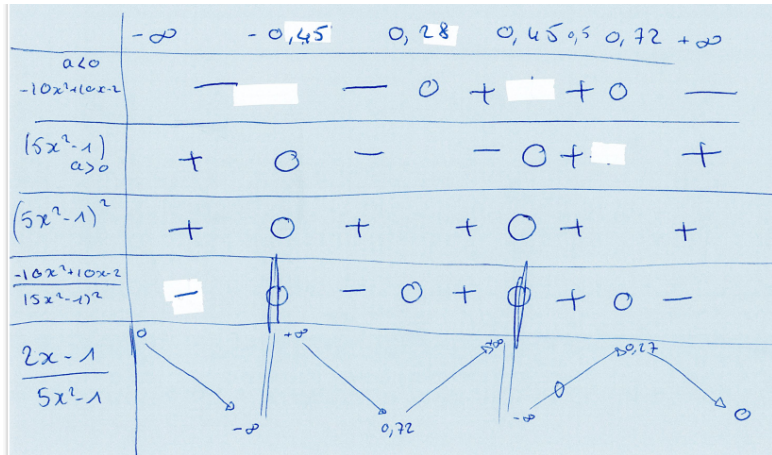
$x$	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{10}$	$\frac{5 + \sqrt{5}}{10}$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	+	+	-	-
$f(x)$						



# Expérimentation

Polytech, Février 2023, ~50 étudiant·es, on récupère le brouillon :

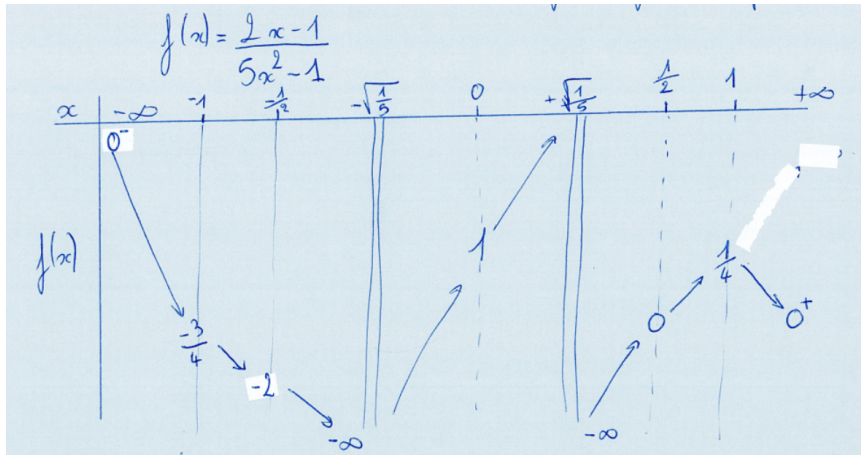
Donnez le tableau de variation de la fonction  $f(x) = \frac{2x-1}{5x^2-1}$ .



# Expérimentation

Polytech, Février 2023, ~50 étudiant·es, on récupère le brouillon :

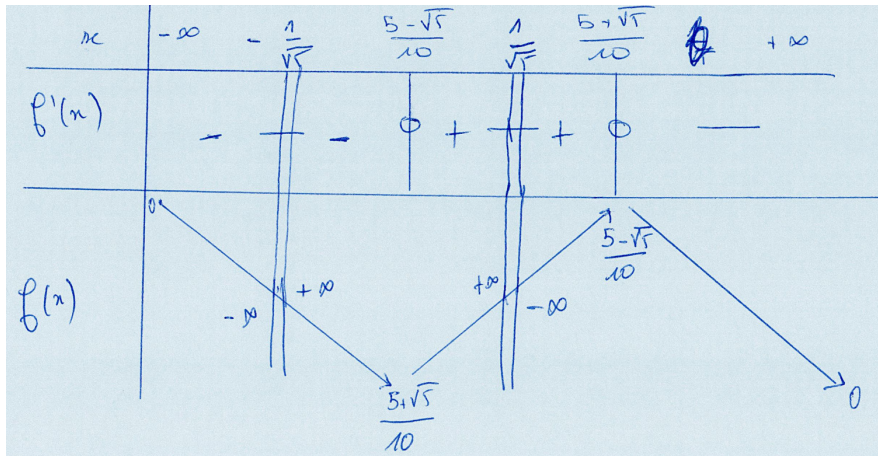
Donnez le tableau de variation de la fonction  $f(x) = \frac{2x-1}{5x^2-1}$ .



# Expérimentation

Polytech, Février 2023, ~50 étudiant·es, on récupère le brouillon :

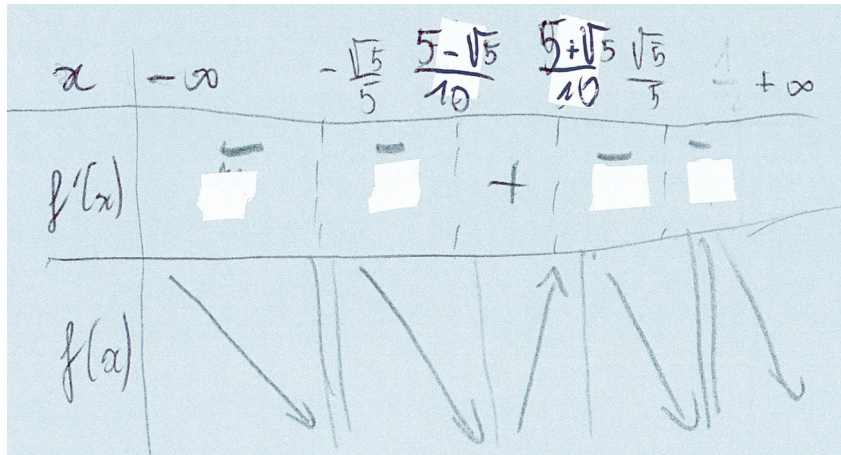
Donnez le tableau de variation de la fonction  $f(x) = \frac{2x-1}{5x^2-1}$ .



# Expérimentation

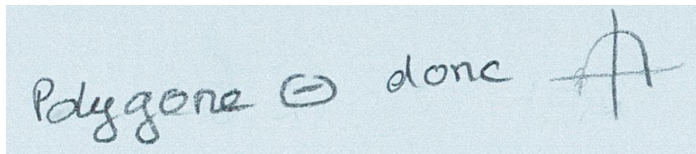
Polytech, Février 2023, ~50 étudiant·es, on récupère le brouillon :

Donnez le tableau de variation de la fonction  $f(x) = \frac{2x-1}{5x^2-1}$ .



Polytech, Février 2023, ~50 étudiant·es, on récupère le brouillon :

Donnez le tableau de variation de la fonction  $f(x) = \frac{2x - 1}{5x^2 - 1}$ .




```
1 Require Import TabVar.  
2  
3 Definition f x :=  
4 (2 * x - 1) / (5 * x^2 - 1).
```


$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	0		
$f'(x)$	$-?$		$-?$

```
1 Eval Compute Deriv f.
```



```
1 (-10*x^2 + 10*x - 2)  
2 / (5 * x^2 - 1)^2
```



<p>...</p> <p>...</p> <p>Signes <math>f'(x)</math></p> <p>Propriété 6: Signe de division</p> <p><math>[-\infty ; -3.06[</math>: négatif</p> <p><math>[-3.06 ; 1.06]</math>: positif</p> <p><math>]1.06 ; +\infty[</math>: négatif</p>	<p>Buts à atteindre</p> <p>Dériver <math>f(x)</math></p> <p>Signes <math>f'(x)</math></p> <p>Extremums</p> <p>Signes numérateur</p> <p>Signes dénominateur</p>																				
<div style="text-align: center; margin-bottom: 10px;">  </div> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="padding: 5px;">x</th> <th style="padding: 5px;">-inf</th> <th style="padding: 5px;">-3.06</th> <th style="padding: 5px;">1.06</th> <th style="padding: 5px;">+inf</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>2x^2-10x+4</math></td> <td style="padding: 5px;">-</td> <td style="padding: 5px;">○</td> <td style="padding: 5px;">+</td> <td style="padding: 5px;">○</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>(x-1)^2</math></td> <td colspan="4" style="padding: 5px;">+</td> </tr> <tr> <td colspan="5" style="padding: 5px;"><math>\oplus</math></td> </tr> </tbody> </table>	x	-inf	-3.06	1.06	+inf	$2x^2-10x+4$	-	○	+	○	$(x-1)^2$	+				$\oplus$					<p>Focalisation : graphique</p> <p>...</p> <p>Focalisation : textuel</p> <p>Propriété 6: Signe de division</p> <p><math>[-\infty ; -3.06[</math>: négatif OK</p> <p><math>[-3.06 ; 1.06]</math>: positif OK</p> <p><math>]1.06 ; +\infty[</math>: négatif OK</p>
x	-inf	-3.06	1.06	+inf																	
$2x^2-10x+4$	-	○	+	○																	
$(x-1)^2$	+																				
$\oplus$																					

Démo



- Brancher (js)Coq sur le proto,
- Montrer le proto à des enseignant·es et prendre leur retour,
- Traduire un TD en Coq,
- Tester sur des étudiant·es.
- Généraliser à d'autres graphismes.

- 1 Démonstrations en cours de maths
- 2 Graphisme et assistants à la preuve
- 3 Expérimentation
- 4 Maquettes
- 5 Démo