

Typage cadré

J. Puydt

mardi 14 avril 2026

Qui suis-je?

Typage cadré

J. Puydt

Mathématicien

Thèse en théorie des nombres 2003

Enseignant

CPGE (spé PC, 2006-2025)

CPGE (sup PCSI, 2025-2026)

Logiciel libre

Développeur Debian (équipes Math, Science, Python, JavaScript et OCaml)

Quel est mon but?

Typage cadré

J. Puydt

Idée principale

Les mathématiques devraient être enseignées, apprises, discutées et inventées dans un assistant, dès la première année.

Conséquences

- Les définitions et résultats initiaux ne devraient pas être trop abstraits
- Les preuves devraient être lisibles
- Les étudiants devraient pouvoir gérer un exercice sans aide (à la fois les questions et les réponses)
- Les enseignants doivent pouvoir gérer des cours accessibles (définitions, exemples, énoncés, preuves)

Soucis expérimentaux avec Rocq

Typage cadré

J. Puydt

Constats

- Trop de détails nécessaires dans les expressions écrites (annotations, opérateurs spécifiques...)
- Les messages d'erreur sont trop souvent lunaires

Diagnostic

La surcharge est relativement mal gérée

Description informelle des cadres

Typage cadré

J. Puydt

Dans les sciences cognitives, en linguistique et intelligence artificielle, un **cadre** est un outil conceptuel pour expliquer comment des informations explicites et des connaissances implicites sont combinées pour donner un sens à un propos

Structure des documents mathématiques

Typage cadré

J. Puydt

Prérequis

Description de tous les concepts potentiellement mobilisables (cours d'arithmétique)

Introductions

Activation des concepts pertinents, sur des objets spécifiques
Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a|b$

Propos

- Nouvelles définitions
- Conclusions
- Preuves

Montrons que $a^2|b^2$

Objectif

Typage cadré

J. Puydt

Texte mathématique

- **Initialisation** Le cadre est construit avec les prérequis et au fur et à mesure des introductions, préparant un terrain adapté pour le lectorat/auditoire
- **Usage** On considère ensuite des expressions et on prouve des propriétés - tout est interprété dans le cadre

Gains pour les assistants de preuve

- Isolation automatique des concepts
- Échec précoce sur erreur
- Messages d'erreurs plus précis

Notion de cadre

Typage cadré

J. Puydt

Graphe d'ensembles

Les sommets sont les **ensembles** pertinents, avec des arêtes données par des flèches de coercion

Par défaut:

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$$

Famille de symboles

On associe à chaque symbole la liste **ordonnée** de ses instances
Par exemple $+$ peut être associé à $[+_N; \dots; +_R]$

Comment ordonner les instances d'un symbole?

Typage cadré

J. Puydt

Problème

Une coercion $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ ne donne pas une comparaison immédiate entre $+_{\mathbb{N}}$ et $+_{\mathbb{Z}}$ car les flèches sont naturellement covariantes sur le but et contravariantes sur la source

Solution

Les opérateurs et prédicats apparaissent spontanément attachés à un objet principal - et le cadre permet de comparer ces derniers: $+_{\mathbb{N}}$ est plus simple que $+_{\mathbb{Z}}$

Définition d'un symbole

- un nom comme $+$
- une liste de **paires** (instance, niveau) ordonnée suivant la seconde composante comme $[(+_{\mathbb{N}}, \mathbb{N}); \dots; (+_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})]$

Ambiguïté: incontournable

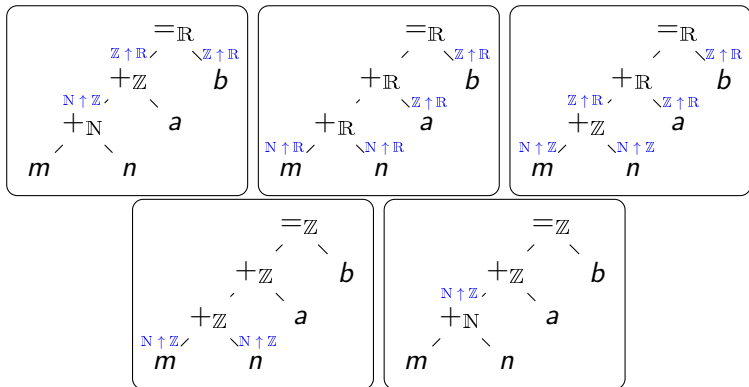
Typage cadré

J. Puydt

Dans le cadre

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} + : [(+_N, \mathbb{N}); (+_Z, \mathbb{Z}); (+_R, \mathbb{R})], \\ = : [(=_N, \mathbb{N}); (= _Z, \mathbb{Z}); (= _R, \mathbb{R})] \end{array} \right\},$$

l'expression $(m + n) + a = b$ avec $m, n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{Z}$, a de multiples interprétations ; dont:



Démonstration

Typage cadré

J. Puydt

- ambiguity
- arithmetic
- filters
- vectors
- zero
- e3a_2025_MP_b_exercice_1

Travail à venir

Typage cadré

J. Puydt

Inclusion dans un assistant de preuve

De meilleurs messages d'erreur

Conclusion

Typage cadré

J. Puydt

Merci

- Y. Bertot, M. Bodin et A. Girault pour leur soutien
- L'audience pour son attention

Questions?

Code

```
https://framagit.org/jpuydt/framed\_typing/-/tree/master/20260319
```